Dynamitage d'une cheminée.

On assimile une cheminée à une tige homogène OA de masse M et de longueur L. On dynamite sa base (point O) et elle amorce une rotation dans un plan vertical autour du point O bloqué par les débris de l'explosion ; on note Oz la verticale ascendante, zOx le plan de chute et $\theta(t)$ l'angle que fait OA avec Oz à l'instant t. Le moment d'inertie de la cheminée par rapport à l'axe Oy est $J = \frac{1}{3}\, M\, L^2$. A moment de l'explosion ($t = 0$), on a $\theta \approx 0$ et $\dot{\theta} \approx 0$. On admet que l'action du sol sur la cheminée se résume à une force $\overrightarrow{R}$ appliquée en O. On note g l'intensité de la pesanteur.

Question 1 :

Trouver une équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ (deux méthodes possibles). En déduire les expressions de $\ddot{\theta}$ et de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des constantes du problème. Trouver ensuite l'expression de $\overrightarrow{R}$ en fonction de $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}^2$ et θ puis de θ seul (et des constantes du problème, bien sûr) ; on projettera non sur Oz et Ox mais sur les vecteurs unitaires radial $\overrightarrow{e_r}$ et orthoradial $\overrightarrow{e_\theta}$ du mouvement.

Première méthode : Appliquons le théorème de l'énergie mécanique. Puisqu'il s'agit d'un solide tournant autour d'un axe fixe Oy, son énergie cinétique est $\frac{1}{2}\, J\, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}\, M\, L^2\, \dot{\theta}^2$, son énergie potentielle est $M\, g\, z_G$ soit puisque G est le milieu de OA, $\frac{1}{2}\, M\, g\, L\, \cos\theta$. Comme la force $\overrightarrow{R}$ a une puissance nulle car la vitesse de O est nulle, l'énergie mécanique se conserve et sa valeur est calculée à partir de la position initiale ($\theta \approx 0$ et $\dot{\theta} \approx 0$) soit :

$$\frac{1}{6}\, M\, L^2\, \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\, M\, g\, L\, \cos\theta = Cte = \frac{1}{2}\, M\, g\, L$$

d'où

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3\, g}{L}\, (1 - \cos\theta) \qquad \text{(équation 1)}$$

Seconde méthode : Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oy.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oy}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\, M\, L^2\, \ddot{\theta} = \left(\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{M\, g}\right) \cdot \overrightarrow{e_y} = \frac{1}{2}\, M\, g\, L\, \sin\theta$$

d'où

$$\ddot{\theta} = \frac{3\, g}{2\, L}\, \sin\theta \qquad \text{(équation 2)}$$

Remarque : La dérivation de l'équation 1 par rapport au temps donne l'équation 2 après simplification par $\dot{\theta}$

Pour trouver $\overrightarrow{R}$ (on notera $\overrightarrow{R} = R_r\, \overrightarrow{e_r} + R_\theta\, \overrightarrow{e_\theta}$) appliquons le théorème du centre de gravité en remarquant que G a un mouvement circulaire de rayon $L/2$

$$M\, \overrightarrow{a}_G = M\, \overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}$$

soit en projection sur $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$

$$-M\, \frac{L}{2}\, \dot{\theta}^2 = R_r - M\, g\, \cos\theta$$

$$M\, \frac{L}{2}\, \ddot{\theta} = R_\theta + M\, g\, \sin\theta$$

d'où

$$R_r = M\, g\, \cos\theta - M\, \frac{L}{2}\, \dot{\theta}^2$$

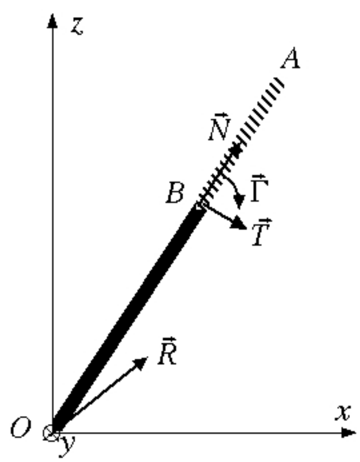
$$R_\theta = M\,\frac{L}{2}\,\ddot\theta - M\,g\,\sin\theta$$

soit en reportant l'équation 1 et l'équation 2

$$R_r = M\,g\,\frac{5\,\cos\theta - 3}{2} \qquad \text{(équation 3)}$$

$$R_\theta = -\frac{1}{4}\,M\,g\,\sin\theta \qquad \text{(équation 4)}$$

On envisage la portion OB de la cheminée de longueur x, de masse $m = M\,\frac{x}{L}$, dont le moment d'inertie par rapport à Oy est $j = \frac{1}{3}\,m\,x^2 = \frac{1}{3}\,\frac{M\,x^3}{L}$. L'action de la partie BA de la cheminée sur la partie OB peut se résumer à l'action combinée d'une force $\overrightarrow{F} = N\,\overrightarrow{e_r} + T\,\overrightarrow{e_\theta}$ appliquée en B et d'un couple $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma\,\overrightarrow{e_y}$ (cf figure).



Question 2 :

Trouver les expressions de N, T et Γ en fonction de x, $\ddot\theta$, $\dot\theta^2$ et θ puis de x et θ seuls (et des constantes du problème).

On reprend le théorème du centre de gravité que l'on applique à OB, de masse m dont le centre de gravité G' décrit un cercle de rayon $x/2$

$$m\,\overrightarrow{a}_{G'} = m\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}$$

soit en projection sur $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$

$$-m\,\frac{x}{2}\,\dot\theta^2 = R_r - m\,g\,\cos\theta + N$$

$$m\,\frac{x}{2}\,\ddot\theta = R_\theta + m\,g\,\sin\theta + T$$

d'où en reportant les expressions trouvées plus haut de $\ddot\theta$, $\dot\theta^2$, R_r, R_θ et $m = M\,\frac{x}{L}$

$$N = -\left(M\,\frac{x}{L}\right)\,\left(\frac{x}{2}\right)\,\left(\frac{3\,g}{L}\,(1-\cos\theta)\right) - \left(M\,g\,\frac{5\,\cos\theta - 3}{2}\right) + \left(M\,\frac{x}{L}\right)\,g\,\cos\theta$$

$$T = \left(M\,\frac{x}{L}\right)\,\left(\frac{x}{2}\right)\,\left(\frac{3\,g}{2\,L}\,\sin\theta\right) - \left(-\frac{1}{4}\,M\,g\,\sin\theta\right) - \left(M\,\frac{x}{L}\right)\,g\,\sin\theta$$

soit tous calculs faits

$$N = \frac{M\,g}{2\,L^2}\,\left(-3\,x^2\,(1-\cos\theta) + 2\,x\,L\,\cos\theta - L^2\,(5\,\cos\theta - 3)\right) \qquad \text{(équation 5)}$$

$$T = \frac{M\,g}{4\,L^2}\,\left(3\,x^2 - 4\,x\,L + L^2\right)\,\sin\theta \qquad \text{(équation 6)}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport à Oy appliqué à OB de moment d'inertie j fait intervenir les moments

- de $\overrightarrow{R}$, nul car $\overrightarrow{R}$ s'exerce en O
- du poids, soit comme plus haut et en changeant ce qu'il faut changer (mutatis mutandis veux-je dire) $\frac{1}{2}\,m\,g\,x\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$
- de la force $\overrightarrow{F}$ appliquée en B, soit $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{F} = x\,\overrightarrow{e_r}\wedge(N\,\overrightarrow{e_r} + T\,\overrightarrow{e_\theta}) = x\,T\,\overrightarrow{e_y}$
- du couple $\Gamma\,\overrightarrow{e_y}$

d'où en projection sur Oy

$$j\,\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\,m\,g\,x\,\sin\theta + x\,T + \Gamma$$

soit en reportant les expressions de T et de $\ddot{\theta}$ trouvée plus haut, $m = M\,\frac{x}{L}$ et $j = \frac{1}{3}\,\frac{M\,x^3}{L}$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{3}\,\frac{M\,x^3}{L}\right)\,\left(\frac{3\,g}{2\,L}\,\sin\theta\right) - \frac{1}{2}\,\left(M\,\frac{x}{L}\right)\,g\,x\,\sin\theta - x\,\left(\frac{M\,g}{4\,L^2}\,\left(3\,x^2 - 4\,x\,L + L^2\right)\,\sin\theta\right)$$

soit tous calculs faits

$$\Gamma = -\frac{M\,g}{4\,L^2}\,\left(x^3 - 2\,L\,x^2 + L^2\,x\right)\,\sin\theta = -\frac{M\,g}{4\,L^2}\,x\,(L-x)^2\,\sin\theta \qquad \text{(équation 7)}$$

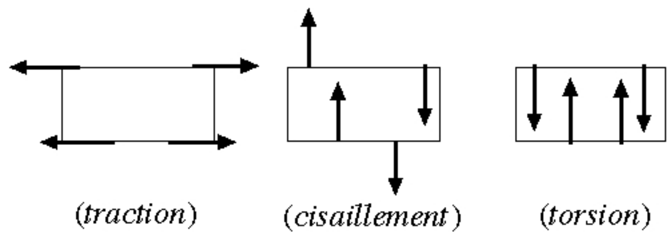
Remarque : Quand $x = L$, la partie BA de la cheminée n'existe plus et n'exerce plus aucune action sur $OB = OA$, on doit donc avoir alors $N = 0$, $T = 0$ et $\Gamma = 0$, ce que confirment l'équation 5, l'équation 6 et l'équation 7. De même si $x = 0$ c'est le système OB qui disparaît et les actions de contact en O et en $B = O$ doivent avoir une somme nulle, soit $N = -R_r$, $T = -R_\theta$ et puisqu'il n'y a pas de couple pour décrire l'action de contact en O, $\Gamma = 0$, ce que confirment l'équation 7 et la confrontation entre l'équation 3 et l'équation 5 d'une part, entre l'équation 4 et l'équation 6 d'autre part.

Question 3 :

Quand on essaie de casser un sucre tenu entre deux pouces et deux index, est-il plus aisé de le faire par une action de traction, de cisaillement ou de rotation (cf figure ci-dessous) ? On admet donc que la cheminée se brise en B si $|\Gamma|$ atteint une valeur critique Γ_c. Pour quelle valeur de x, cette valeur critique est-elle atteinte la plus vite, c'est-à-dire pour la plus petite valeur de t donc de θ ? Où se brisent donc les cheminées dynamitées ?

C'est évidemment par rotation qu'on casse le sucre, c'est donc que le couple atteint le plus facilement une valeur critique et c'est ainsi qu'il faut envisager la rupture de la cheminée. Le couple Γ (cf équation 7) s'écrit sous la forme $\Gamma = -A\,f(x)\,\sin\theta$ où

- d'une part $A = \frac{M\,g}{4\,L^2}$ est une constante positive,
- d'autre part $f(x) = x^3 - 2\,L\,x^2 + L^2\,x = x\,(L-x)^2$ une fonction positive pour les valeurs physiques de x $(0 < x < L)$.



En un point B repéré par x la rupture a lieu quand

$$A\,f(x)\,\sin\theta = \Gamma_c$$

soit pour un angle

$$\theta_c(x) = \arcsin\left(\frac{\Gamma_c}{A\,f(x)}\right)$$

Le point où se rompra la cheminée est celui pour lequel $\theta_c(x)$ est le plus petit, soit celui pour lequel $f(x)$ est le plus grand. Il ne nous reste qu'à situer le maximum de f

$$f(x) = x^3 - 2\,L\,x^2 + L^2\,x$$

$$f'(x) = 3\,x^2 - 4\,L\,x + L^2 = (3\,x - L)\,(x - L)$$

L'extremum est obtenu pour $x = \frac{1}{3}$: c'est donc au tiers inférieur que se brisera la cheminée.

Question 4 :

L'image ci-dessous, extraite d'un vidéo-enregistrement, vérifie-t-elle le résultat obtenue ? Sinon pourquoi ?

Ici la cheminée se brise pratiquement en son milieu et non au tiers inférieur. Il y a plusieurs explications à cela :

- la cheminée n'est pas homogène, elle est plus grosse à sa base qu'à son extrémité, ce qui modifie son moment d'inertie,
- la cheminée n'a pas été dynamitée, sinon le nuage de poussière qui s'élève à partir du pied masque le point de rupture, elle a été vraisemblablement tractée à son sommet pour amorcer la chute, ce qui modifie les conditions initiales,

– la cheminée ne tombe pas dans un plan perpendiculaire à l'axe optique de la caméra, ce qui modifie les proportions : le point vu au milieu ne l'est pas forcément,
– la cheminée ne tourne pas autour de sa base mais autour de l'arête du talus, qui du reste masque la partie inférieure, ce qui modifie là aussi son moment d'inertie.